

سه‌شنبه

۱۴۰۳/۱۲/۲۸

دفترچه پاسخ

جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی
(فصل ۵ دهم + فصل ۳ و ۵ یازدهم +
فصل ۱ دوازدهم)

دوبینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی
ریاضی

دروس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضی	حسین شفیع‌زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان - محمد خانگلدی	فرشاد حسن‌زاده ارسلان حسنونند - سجاد احمدی

جامع شمارش، بدون
شمردن و آمار و احتمال

هفته ششم

الگو و دنباله + توان‌های
گویا + جامع هندسه

هفته پنجم

جامع حد و پیوستگی +
مشتق و کاربرد مشتق

هفته چهارم

جامع مثلثات

هفته سوم

جامع تابع +
توابع نمایی و لگاریتمی

هفته دوم

مباحث پایه

هفته اول

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshClouds



دانش‌آموزان عزیز ماز ❤️

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشید.

اهمیت فصل تابع و توابع نمایی و لگاریتمی.

از این دو تا فصل سرجمع حدود ۵ تا ۷ تست توی کنکور سوال میاد که واقعاً هر چقدر بخوان سختش کنن باز میشه حلشون کرد پس حواست باشه که این تست‌ها رو مال خودت بکنی.

از مهمترین بخش‌های این دو تا فصل میشه به بخش‌های ویژگی‌های لگاریتم، معادله‌های نمایی و لگاریتمی، نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی، انتقال توابع، ترکیب و وارون توابع اشاره کرد. البته یادت باشه که خیلی از وقت‌ها از این دو تا فصل به صورت ترکیبی سوال میدن، مثلاً میان تابع لگاریتمی رو میبرن تو فاز انتقال توابع، پس مراقب باش که اخیراً رد پای سوال‌های ترکیبی، توی ریاضی هم مشاهده شده، پس تا میتونی روی رسم نمودار توابع هم مسلط باش که توی حل خیلی از تست‌ها کاربردی‌ه!

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

با توجه به اینکه تابع مفهومی جدیدی است که در دوران دبیرستان با آن آشنا می‌شوید، بنابراین برای یادگیری نیاز به مرور خاصی نیست.

لگاریتم و توابع نمایی هم بخش جدیدی است که یک پیش‌نیاز مهم دارد و آن هم تابع است که ما خودمان آن را آورده‌ایم!

این بخش‌ها در کدام قسمت‌های دیگر کاربرد دارند؟

برای حل سوالات بخش حد و پیوستگی و مشتق نیاز مبرم به تسلط روی مباحث این دو فصل مخصوصاً فصل تابع دارید. پس به خوبی آن‌ها را یاد بگیرید.

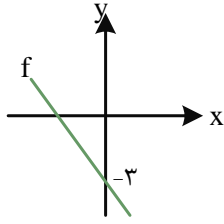
از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۷	۷	۷	۶	۵	۵
مباحث مطرح شده در سوال	دامنه توابع رسم نمودار توابع انتقال توابع تابع وارون و انتقال توابع دامنه تابع لگاریتمی معادله لگاریتمی معادله نمایی	اعمال توابع انتقال توابع تابع وارون ترکیب توابع توابع صعودی و نزولی ویژگی‌های لگاریتم تابع نمایی	تابع ثابت انتقال توابع وارون و ترکیب توابع دامنه توابع دامنه تابع لگاریتمی ویژگی‌های لگاریتم نامعادله نمایی	دامنه توابع ترکیب توابع یکنوایی توابع تابع وارون ویژگی‌های لگاریتم معادلات لگاریتمی	ترکیب توابع یکنوایی توابع تابع وارون مفهوم تابع نمودار توابع نمایی	تابع وارون مفهوم تابع دامنه توابع تبدیل نمودار توابع نمودار توابع لگاریتمی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان... ❁

حسین شفیع‌زاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز





۱- نمودار تابع خطی f شکل روبه‌رو است. اگر $f(1) = 7$ ، مقدار $f(f(-2))$ چه عددی است؟

- ۱) ۵-
- ۲) ۷-
- ۳) ۳-
- ۴) ۴-

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = mx - 3 \Rightarrow f(f(x)) = m(mx - 3) - 3$$

$$f(f(1)) = 7 \Rightarrow f(f(1)) = m^2 - 3m - 3$$

$$m^2 - 3m - 3 = 7 \Rightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 5 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$f(x) = -2x - 3$$

چون $m < 0$ ، پس $m = -2$.

$$f(f(-2)) = f(f(1)) = f(1) = -5$$

گروه آموزشی ماز

۲- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + bx^3 & |x| \geq 1 \\ 3x^3 + ax^2 & |x| \leq 1 \end{cases}$ بیانگر تابع باشد، مقدار $f(-a)$ چه عددی است؟

- ۱) $\sqrt{7} + 24$
- ۲) $\sqrt{7} - 24$
- ۳) ۱۶
- ۴) ۱۶-

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

چون $f(x)$ تابع است، پس باید مقدار تابع به ازاء $x = 1$ و $x = -1$ از بالا و پایین با هم برابر باشند، یعنی:

$$f(1) = 2 + b = 3 + a \Rightarrow b - a = 1$$

$$f(-1) = 2 - b = -3 + a \Rightarrow b + a = 5 \Rightarrow b = 3, a = 2$$

$$f(-a) = f(-2) = \sqrt{7} - 24$$

گروه آموزشی ماز

۳- هرگاه $f = \{(n, 2), (2, n^2), (n+1, 2n), (2, n+2)\}$ مقدار $f(-1)$ چه عددی است؟

- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) صفر
- ۴) ۱-

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

چون f تابع است، پس:

$$\begin{cases} (2, n^2) \in f \\ (2, n+2) \in f \end{cases} \Rightarrow n^2 = n+2 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -1 \end{cases}$$

غ ق ق، زیرا f تابع نیست. $n = 2: f = \{(2, 2), (2, 4), (3, 4), (2, 4)\}$

$n = -1: f = \{(-1, 2), (2, 1), (0, -2), (2, 1)\} \Rightarrow f = \{(-1, 2), (2, 1), (0, -2)\}$

$$f(f(-1)) = f(2) = 1$$

گروه آموزشی ماز

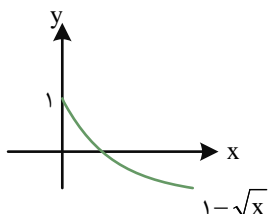
۴- تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & x \geq 0 \\ k - x & x < 0 \end{cases}$ یک به یک است، حدود k کدام است؟

- ۱) $k \leq -1$
- ۲) $-1 \leq k \leq 1$
- ۳) $k \geq 1$
- ۴) $|k| \geq 1$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

به کمک نمودار داریم:



کافی است $k \geq 1$ ، زیرا $y = k - x$ نزولی اکید است و کافی است عرض از مبدأ آن از بزرگ‌تر مساوی ۱ باشد.



۵- اگر $D_g = [-3, 2]$ و $D_{f+g} = [-2, 1]$ دامنه تعریف تابع $y = 2f(x)$ کدام می تواند باشد؟

- (۱) $[-3, 1]$ (۲) $[-2, 1]$ (۳) $[-2, 2]$ (۴) $[-3, -2]$

آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ در واقع برای یافتن D_{2f} یا همان D_f کافی است از تساوی مقابل کمک بگیریم که:
 دامنه تعریف تابع f می تواند بازه $[-2, 1]$ باشد، پس تنها گزینه قابل قبول، گزینه ۲ است.

گروه آموزشی ماز

۶- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ به طوری که $f^{-1}(x) = ax^2 + bx$ مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) ۲

متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

$$y = 1 - \sqrt{1-x} \Rightarrow 1-y = \sqrt{1-x}$$

$$y^2 - 2y + 1 = 1-x \Rightarrow x = 2y - y^2$$

$$f^{-1}(x) = 2x - x^2 \xrightarrow{x \leq 1} a = -1, b = 2 \Rightarrow ab = -2$$

روش دوم:

می توانیم با انتخاب ۲ عدد مناسب از دامنه a و b را بیابیم.

$$\begin{cases} f(1) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ f(-3) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -3 \Rightarrow a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = +2 \end{cases} \Rightarrow ab = -2$$

نکات طلایی تابع وارون!

اگر در نمایش زوج مرتبی یک تابع، جای مولفه اول و دوم را در همه زوج مرتبها با هم عوض کنیم، مجموعه جدیدی به دست می آید که آن را وارون تابع f می گوئیم و با f^{-1} نمایش می دهیم. توجه کنید که وارون یک تابع، ممکن است تابع نباشد.

به عنوان مثال

$$f = \{(-1, 3), (2, 1), (-2, 3), (0, 4)\}$$

$$f^{-1} = \{(3, -1), (1, 2), (3, -2), (4, 0)\}$$

همانطور که می بینید وارون تابع f ، تابع نمی باشد. حال، اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آن گاه تابع f را وارون پذیر می گوئیم و f^{-1} را تابع وارون f می نامیم.

توجه!

اگر f تابعی یک به یک باشد، در این صورت، وارون پذیر است و بالعکس، یعنی اگر تابعی وارون پذیر باشد می توان نتیجه گرفت که آن تابعی یک به یک است.

گروه آموزشی ماز

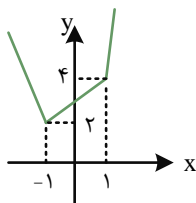
۷- تابع $f(x) = |x-1| + 2|x+1|$ ، فقط در بازه $[\alpha, +\infty)$ صعودی اکید است. حداقل α کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۲

با رسم نمودار تابع f مشخص می شود، تابع در بازه $[-1, +\infty)$ صعودی اکید است، پس حداقل α برابر -۱ است.





هر آنچه باید درباره «توابع یکتوا» بدانید!

مقال نموداری	تعریف ریاضی	توضیح	تابع
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ افزایش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	صعودی
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ کاهش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	نزولی
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ همواره افزایش می‌یابد.	اکیداً صعودی
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ همواره کاهش می‌یابد.	اکیداً نزولی
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ همواره ثابت است.	تابع ثابت (هم صعودی و هم نزولی)

توجه!

به تابعی که نه صعودی و نه نزولی باشد، تابع **غیریکتوا** می‌گوییم. به عبارت دیگر تابع غیریکتوا تابعی است که در دامنه‌ی تعریف خود در بازه‌هایی صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد.

گروه آموزشی ماز

۸- اگر نقطه $A(2a, a)$ روی وارون تابع $f(x) = \frac{ax}{x-1}$ باشد، مقدار a چه عددی می‌تواند باشد؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۱)

چون $A(2a, a)$ روی وارون تابع $f(x) = \frac{ax}{x-1}$ قرار گرفته است، پس $A'(a, 2a)$ روی نمودار f واقع شده است، پس:

$$2a = \frac{a^2}{a-1} \Rightarrow 2 = \frac{a}{a-1}, a \neq 0$$

$$2a - 2 = a \Rightarrow a = 2$$

گروه آموزشی ماز





۹- دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{4-x}} - 2}$ بازه $[\alpha, \beta]$ است. مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۵ (۳) $\frac{۱۵}{۴}$ (۴) ۱۷

متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۲

$$4-x > 0 \Rightarrow x < 4, \frac{1}{\sqrt{4-x}} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{4-x} \geq 4 \xrightarrow{4-x > 0} 4-x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq \frac{15}{4}$$

$$D_f = \left[\frac{15}{4}, 4\right) \Rightarrow \alpha\beta = 15$$

ایستگاه دامنه توابع رادیکالی

برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی، با توجه به فرجه رادیکال داریم:

▲ اگر فرجه رادیکال فرد باشد، دامنه تابع با دامنه عبارت زیر رادیکال برابر است. به عبارت دیگر، رادیکال فرجه فرد را نادیده می‌گیریم و فقط دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g$$

▲ اگر فرجه رادیکال زوج باشد، برای پیدا کردن دامنه تابع، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست می‌آوریم (D_g).

۲. عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم و مجموعه جواب آن را به دست می‌آوریم. ($g(x) \geq 0$)، دقت کنید که اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت زیر رادیکال رو بزرگ‌تر از صفر بنذاریم. فب معلومه دیکه، مخرج کسر که نمیتونه صفر باشه!

۳. از محدوده‌های به دست آمده در مراحل ۱ و ۲، اشتراک می‌گیریم.

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x \mid x \in D_g, g(x) \geq 0\}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- هرگاه $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ باشد، تابع $y = f \circ f(x)$ خط $y = -2x$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ (۲) $\frac{3\sqrt{5}}{64}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{16}$

متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۱

پاسخ: گزینه ۱

$$f \circ f(x) = \frac{f(x)}{2f(x)+1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{2x}{2x+1} + 1} = \frac{x}{4x+1}$$

$$f \circ f(x) = -2x \Rightarrow \frac{x}{4x+1} = -2x \Rightarrow \begin{cases} x=0, A \\ 4x+1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}, B \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{36}{64}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

فاصله دو نقطه از یکدیگر چه فرمولی داشت؟

فاصله دو نقطه $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



۱۱- هرگاه $f(x) = [x] - 2x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ مقدار $g\left(-\frac{5}{3}\right)$ چه عددی است؟

$-\frac{1}{3}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \left[-\frac{5}{3}\right] + \frac{5}{3} \times 2 = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow g\left(-\frac{5}{3}\right) = g\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\left[\frac{4}{3} + f\left(\frac{4}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[\frac{4}{3} + \left[\frac{4}{3}\right] - \frac{8}{3}\right]\right) = f\left(\left[1 - \frac{4}{3}\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3}\right]\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\left[-\frac{1}{3}\right]\right) = f(-1) = -1 + 2 = 1$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x+3}$ وارون خودش را در نقاطی به طول ۱- و ۳ قطع می کند، مقدار $f^{-1}(6)$ چه عددی است؟

-۱۵ (۴)

۶ (۳)

-۶ (۲)

۱۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

جرقه ذهنی

تابع هموگرافیک وارون خودش را فقط روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می کند.

$$f(-1) = -1 \Rightarrow \frac{-a+b}{2} = -1 \Rightarrow b-a = -2$$

$$f(3) = 3 \Rightarrow \frac{3a+b}{6} = 3 \Rightarrow 3a+b = 18$$

$$\begin{cases} b-a = -2 \\ 3a+b = 18 \end{cases} \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5, b = 3$$

$$f(x) = \frac{5x+3}{x+3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x+3}{x-5}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(6) = \frac{-18+3}{1} = -15$$

f و f⁻¹ کجا همدیگر رو قطع می کنند؟!

(۱) اگر تابع f صعودی باشد، در این صورت نقاط برخورد دو تابع f و f⁻¹ روی نیمساز ناحیه اول و سوم (y = x) قرار دارند، بنابراین برای پیدا کردن طول نقطه (نقاط) برخورد، معادله x = f(x) را حل می کنیم.

(۲) اگر تابع f، تابعی صعودی نباشد، در این صورت، ابتدا ضابطه تابع f⁻¹ را به دست می آوریم و سپس با حل معادله f⁻¹(x) = f(x)، طول نقطه (نقاط) برخورد را پیدا می کنیم. (توجه کنید که در این حالت، برای حل معادله f⁻¹(x) = f(x)، از روش رسم هندسی هم می توانیم استفاده کنیم.)

تذکره!

در این تیپ سوالات، اگر به دست آوردن ضابطه وارون تابع سخت باشد، بهتر است از راه های دیگری همچون یکنوایی توابع استفاده کنید.

گروه آموزشی ماز



۱۳- اگر $x \geq 2$ و $f(x) = 2x^2 - 8x - 1$ و $g(x) = \frac{5x-3}{2}$ ، مقدار $g^{-1} \circ f^{-1}(-\frac{9}{2})$ کدام است؟

۳ (۴)

$\frac{7}{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$f^{-1}(-\frac{9}{2}) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -\frac{9}{2}$$

$$2\alpha^2 - 8\alpha + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow (2\alpha - 7)(\alpha - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{7}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \text{ غ قق} \end{cases}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(-\frac{9}{2}) = g^{-1}(\frac{7}{2})$$

$$g^{-1}(\frac{7}{2}) = \beta \Rightarrow g(\beta) = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{5\beta - 3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow \beta = 2$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- هرگاه $fog(x) = 2 - 3x$ و $g^{-1}(x) = \frac{2x}{x-3}$ ، مقدار $f^{-1}(-3)$ کدام است؟

$-\frac{1}{5}$ (۴)

۱ (۳)

-۱۵ (۲)

$\frac{15}{7}$ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

در ضابطه $fog(x) = 2 - 3x$ ، به جای x قرار می‌دهیم $g^{-1}(x)$ ، پس:

$$fog(g^{-1}(x)) = 2 - 3g^{-1}(x)$$

$$f(x) = 2 - 3 \times \frac{2x}{x-3} = 2 - \frac{6x}{x-3} = \frac{-4x-6}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{4x+6}{-x+3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x+6}{-x-4} = \frac{3x-6}{x+4}$$

نکته‌ای به رنگ طلا

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f^{-1}(-3) = \frac{-9-6}{1} = -15$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- هرگاه $f(x) = \sqrt{x-1} - 2\sqrt{9-x}$ ، جواب نامعادله $f(4-2x) \leq f(x+1)$ کدام است؟

$-\frac{5}{2} \leq x \leq 1$ (۴)

$-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ (۳)

$1 \leq x \leq 8$ (۲)

$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

f با دامنه $D_f = [1, 9]$ تابعی صعودی اکید است به طوری که:

$$x+1 \in D_f \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq x \leq 8$$

$$4-2x \in D_f \Rightarrow 1 \leq 4-2x \leq 9 \Rightarrow \frac{-5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$4-2x \leq x+1 \Rightarrow x \geq 1$$

از طرفی، چون f صعودی اکید است، پس:

پس در کل $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ جواب نهایی است.

گروه آموزشی ماز



۱۶- اگر وارون تابع $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + 6$ ، خط $4x + y = 3$ را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کند، مقدار a کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) -4 (۴) -6

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

پس $x = 1$ ، یعنی $A(1, -1)$ روی وارون تابع است و $A'(-1, 1)$ روی نمودار $y = f(x)$ خواهد بود، پس:
 $f(-1) = 1 \Rightarrow -1 + 2 - a + 6 = 1 \Rightarrow a = 6$

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $f(x) = x^2 - [x]$ به طوری که $f(af(\sqrt{3})) = 6$ ، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{6}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا $f(\sqrt{3})$ را به دست آورده و آن را جایگزین می‌کنیم:

$$f(\sqrt{3}) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow f(2a) = 6$$

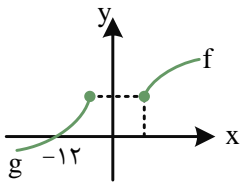
$$4a^2 - [2a] = 6$$

با توجه به گزینه‌های موجود $a = \sqrt{2}$ قابل قبول است.

گروه آموزشی ماز

۱۸- نمودار توابع $f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = a - \sqrt{b-x}$ شکل مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟

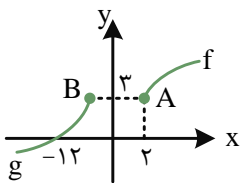
- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) صفر



(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار $y = f(x)$ نقطه ابتدایی نمودار f نقطه $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ است، پس فرض می‌کنیم $B \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \end{pmatrix}$ یعنی $a = 3$ ، از طرفی:



$$g(-12) = 0 \Rightarrow 3 - \sqrt{b+12} = 0 \Rightarrow \sqrt{b+12} = 3 \Rightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow a + b = 0$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{4x+16}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده‌ایم و سپس ۶ واحد به بالا و k واحد به سمت چپ انتقال داده‌ایم به طوری که نمودار حاصل تابع $y = f(x)$ را روی محور عرض‌ها قطع کرده است، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۳

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

تغییرات بیان شده را به ترتیب بر روی تابع f اثر می‌دهیم و داریم:

$$\sqrt{4x+16} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -\sqrt{-4x+16} \xrightarrow{\substack{6 \text{ واحد به بالا} \\ k \text{ واحد به چپ}}} 6 - \sqrt{-4(x+k)+16} = g(x)$$

حال تابع به دست آمده به ازاء $x = 0$ و $f(0)$ با هم برابرند، پس:

$$g(0) = 6 - \sqrt{16 - 4k}$$

$$f(0) = 4$$

$$\Rightarrow 6 - \sqrt{16 - 4k} = 4 \Rightarrow \sqrt{16 - 4k} = 2 \Rightarrow 16 - 4k = 4 \Rightarrow 4k = 12 \Rightarrow k = 3$$

آزمون وی آی پی

اولین بخش آزمون ها در تلگرام

آرشیو آزمون های سال گذشته 🤯

جهت دانلود آزمون ها در کانال ما با آیدی
زیر در تلگرام عضو باشید:

@AzmonVip
t.me/AzmonVip

دانلود



آموزش
فرهنگی



www.SanjeshCloud.ir
T.me/SanjeshCloud



۱) به سرزمین «تبدیلات تابع» خوش آمدید!

برای تابع $f(x)$ داریم:

۱) $f(x+k) \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \rightarrow \\ k < 0 \rightarrow \end{cases}$

k واحد در جهت افقی به چپ

$|k|$ واحد در جهت افقی به راست

۲) $f(x)+k \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \rightarrow \\ k < 0 \rightarrow \end{cases}$

k واحد در جهت عمودی به بالا

$|k|$ واحد در جهت عمودی به پایین

۳) $kf(x) \Rightarrow \begin{cases} k > 1 \rightarrow \\ 0 < k < 1 \rightarrow \end{cases}$

انبساط عمودی با ضریب k

انقباض عمودی با ضریب k

۴) $-f(x) \rightarrow$ قرینه نسبت به محور x ها

۵) $f(kx) \Rightarrow \begin{cases} k > 1 \rightarrow \\ 0 < k < 1 \rightarrow \end{cases}$

$\frac{1}{k}$ انقباض افقی با ضریب

$\frac{1}{k}$ انبساط افقی با ضریب

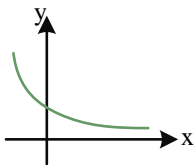
۶) $f(-x) \rightarrow$ قرینه نسبت به محور y ها

۲) دامنه تابع مرکب چی میشه؟

دامنه تابع $h(x) = f \circ g(x)$ برابر است با: $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{N}$) و $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ توابع نمایی و نمودار $f.g$ به صورت مقابل باشد، حاصل $f.g(-2)$ چقدر است؟



۱/۵ (۱)

۲ (۲)

۲/۲۵ (۳)

۲/۵ (۴)

آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار تابع $f.g = (\frac{1}{3})^x$ مشخص می شود که $0 < \frac{a}{3} < 1$ است، بنابراین:

$0 < a < 3 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}}$ $\begin{cases} a = 1 \text{ غ ق ق (نیست)} \\ a = 2 \checkmark \end{cases}$ $f(x) = 1^x$ نمایی نیست

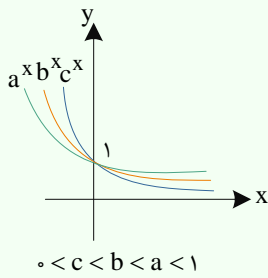
$f.g(x) = (\frac{1}{3})^x \Rightarrow (f.g)(-2) = (\frac{1}{3})^{-2} = \frac{9}{1} = 9$

خواهیم داشت:

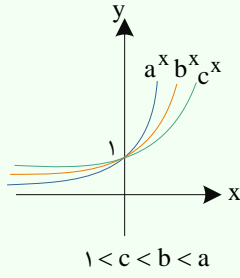


هر آنچه درباره نمودارهای توابع نمایی نیاز هست بدانید!

مقایسه نمودارهای $f(x) = a^x$ و $g(x) = b^x$ و $h(x) = c^x$:



$$0 < c < b < a < 1$$



$$1 < c < b < a$$

- ۱ $x > 0 \rightarrow f(x) > g(x) > h(x)$
- ۲ $x = 0 \rightarrow f(x) = g(x) = h(x) = 1$
- ۳ $x < 0 \rightarrow f(x) < g(x) < h(x)$

به عبارت دیگر در Xهای مثبت هر چه پایه بزرگتر باشد، نمودار تابع بالاتر قرار می‌گیرد و در Xهای منفی، هر چه پایه بزرگتر باشد نمودار تابع پایین‌تر قرار می‌گیرد.

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $(1 - 3^{x-1}) - 3(3^{x-1} - 1) = 9^x - 3^{x+1}$ باشند، بیشترین مقدار $3^\alpha \times 9^\beta$ چقدر است؟

۲۷ (۴)

۹ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$9^x - 3^{x+1} = 3(3^{x-1} - 1) \Rightarrow 9^x - 3 \times 3^x = 3^x - 3 \Rightarrow 9^x - 4 \times 3^x + 3 = 0$$

اگر $3^x = k$ باشد، خواهیم داشت:

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \end{cases}$$

دو حالت وجود دارد:

$$\begin{cases} 3^\alpha = 1 \\ 3^\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow 3^\alpha \times 9^\beta = 9$$

حالت اول:

$$\begin{cases} 3^\alpha = 3 \\ 3^\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow 3^\alpha \times 9^\beta = 3$$

حالت دوم:

بنابراین بیشترین مقدار $3^\alpha \times 9^\beta$ برابر ۹ است.

گروه آموزشی ماز

۲۲- معادله $\log_2^{|x+1|} + \log_2^{(x+4)} = 2$ دارای چند جواب است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_2^{|x+1|} + \log_2^{(x+4)} = 2 \Rightarrow |x+1|(x+4) = 4$$

$$\begin{cases} x > -1 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 4 \Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x = -5 \text{ غ ق ق} \end{cases} \\ x < -1 \Rightarrow -(x+1)(x+4) = 4 \Rightarrow x^2 + 5x + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{بدون جواب} \end{cases}$$

بنابراین $x = 0$ تنها جواب معادله است.

گروه آموزشی ماز



۲۳- اگر $2 \log(\sqrt{5} - 2\sqrt{10} + k) = 1 - \log 2$ باشد، \log_4^k چقدر است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

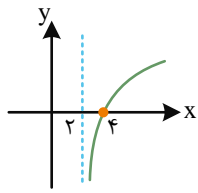
پاسخ: گزینه ۳

معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 \log(\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} + k) = \log 5 \Rightarrow \log(\sqrt{5} - \sqrt{2} + k) = \frac{1}{2} \log 5 = \log \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} - \sqrt{2} + k = \sqrt{5} \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \log_4^k = \log_4^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$



گروه آموزشی ماز

۲۴- نمودار تابع $f(x) = a + \log_4(x+b)$ به صورت مقابل است. $f(6)$ چقدر است؟

- $\frac{1}{2}$ (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

$$x + b > 0 \Rightarrow x > -b$$

دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

با توجه به نمودار $-b = 2$ و در نتیجه $b = -2$ است.

$$f(4) = 0 \Rightarrow a + \log_4(4-2) = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -1 + \log_4(x-2) \Rightarrow f(6) = -1 + \log_4^6 = -1 + 2 = 1$$

خواهیم داشت:

دامنه لگاریتم چطوری به دست می‌آید؟

برای به دست آوردن دامنه تابع $y = \log_{g(x)}^{f(x)}$ باید شروط زیر را بررسی کنیم:

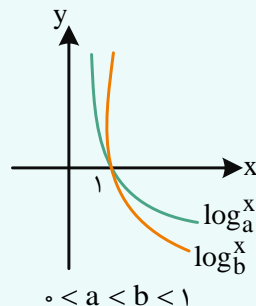
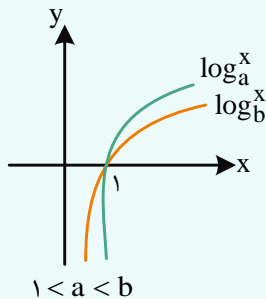
- (۱) $f(x) > 0$ (عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشد) (۲) $g(x) > 0$ (مینای لگاریتم مثبت باشد) (۳) $g(x) \neq 1$ (مینای لگاریتم یک نباشد)

پس از حل نامساوی‌های بالا، برای به دست آوردن دامنه، بین جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم، به عبارتی دیگر:

$$y = \log_{g(x)}^{f(x)} \quad D_y : \{x | f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1\}$$

تغییر مینا چطوری نمودار log رو عوض می‌کنه؟

مقایسه نمودارهای توابع \log_a^x و \log_b^x : $g(x) = \log_b^x$ و $f(x) = \log_a^x$



- ۱ $x > 1 \rightarrow f(x) > g(x)$
 ۲ $x = 1 \rightarrow f(x) = g(x)$
 ۳ $0 < x < 1 \rightarrow f(x) < g(x)$

به عبارت دیگر در $x > 1$ هر چه مینا بزرگ‌تر باشد، نمودار اون پایین‌تر قرار می‌گیره و در $0 < x < 1$ هر چه مینا بزرگ‌تر باشد، نمودار اون بالاتر قرار می‌گیره.

گروه آموزشی ماز



۲۵- جرم یک نوع ماده رادیواکتیو هر ۱۰ سال نصف می‌شود. اگر ۶ کیلوگرم از این ماده موجود باشد، پس از چند سال جرم آن ۲ کیلوگرم است؟

$$(\log 3 \approx 0.48, \log 2 \approx 0.3)$$

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۲



$$f(t) = A_0 k^{\frac{t}{m}} \Rightarrow f(t) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \Rightarrow 2 = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \log\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow -\frac{t}{10} \log 2 = -\log 3$$

$$\Rightarrow \frac{t}{10} = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow \frac{t}{10} = \frac{0.48}{0.3} \Rightarrow t = 16$$

مقدار یک ماده با گذشت زمان چجوری کم می‌شه؟! باید رادیواکتیو باشه!

اگر مقدار اولیه A_0 بعد از گذشت m واحد زمانی k برابر شود، مقدار آن بعد از t واحد زمانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

A_0 = مقدار در لحظه شروع

$f(t)$ = مقدار پس از گذشته t واحد زمانی

$$f(t) = A_0 k^{\frac{t}{m}}$$

◆ گروه آموزشی ماز ◆